CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD EN R2

youtube.com/jmsreales

notodoesmatematicas.com

- CONTINUIDAD en (x_0,y_0): $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

- LÍMITES en (x_0,y_0): $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$

NO EXISTENCIA

- ITERADOS: $\begin{cases} \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = a \\ \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = \text{L candidato} \\ a \neq b \Rightarrow \nexists \text{ L} \end{cases}$

- RECTAS: $y = m(x-x_0) + y_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} f(x, m(x-x_0)+y_0) = \begin{cases} g(m) & \Rightarrow \nexists \text{ L} \\ L & \Rightarrow \text{candidato} \end{cases}$$

- REDUCCION a (0,0): $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x',y')\to(0,0)} f(x,y)$$

- TRAYECTORIAS: $y = mx^n$, $x = my^n$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx^n) = \begin{cases} g(m) & \Rightarrow \nexists \text{ L} \\ L & \Rightarrow \text{candidato} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(my^n, y) = \begin{cases} g(m) & \Rightarrow \nexists \text{ L} \\ L & \Rightarrow \text{candidato} \end{cases}$$

- POLARES: $\begin{cases} x = r\sin\alpha \\ y = r\cos\alpha \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\sin\alpha, r\cos\alpha) = g(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \nexists \text{ L}$$

EXISTENCIA

- ✓ DEFINICIÓN:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

- ✓ MAYORANTE: $|f(r\sin\alpha, r\cos\alpha) - L| \leq g(r) \longrightarrow 0$

- DERIVADAS PARCIALES en (x_0,y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

- GRADIENTE en (x_0,y_0):

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$$

dirección máxima variación
dirección pendiente máxima

- PLANO TANGENTE en (x_0,y_0):

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

- DERIVADAS DIRECCIONAL en (x_0,y_0) a lo largo de (v_1,v_2):

$$D_{(v_1,v_2)} f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hv_1, y_0+hv_2) - f(x_0,y_0)}{h}$$

✓ *f diferenciable* $\Rightarrow D_{(v_1,v_2)} f(x_0,y_0) = v_1 \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$

- DIFERENCIABILIDAD en (x_0,y_0):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h - \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

- RELACIONES NOTABLES:

✓ *f diferenciable en* (x_0,y_0) $\;\Rightarrow\!\!\!\!\not\Leftarrow\;$ *f continua en* (x_0,y_0)

✓ *f diferenciable en* (x_0,y_0) $\;\Rightarrow\!\!\!\!\not\Leftarrow\;$ $\exists D_{\vec{v}} f(x_0,y_0)\ \forall \vec{v} \in \mathbb{R}$

✓ *f diferenciable en* (x_0,y_0) $\;\Rightarrow\!\!\!\!\not\Leftarrow\;$ $\exists \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$

✓ *f continua en* (x_0,y_0)
✓ $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ continuas
$\;\Rightarrow\!\!\!\!\not\Leftarrow\;$ *f diferenciable en* (x_0,y_0)