Listado de problemas de oposiciones y enlaces a su solución.

José María Sánchez Reales
notodoesmatematicas.com
notodoesmatematicas@hotmail.com

22 de septiembre de 2021

Resumen

En este documento se listan los enunciados de los problemas de oposiciones resueltos (estén publicados o por publicar) en el canal de matemáticas de youtube No todo es matemáticas. Este documento se actualizará periódicamente con nuevos problemas o con enlaces actualizados, por lo que es conveniente revisarlo cada 2-3 meses (mira la fecha del encabezado: *Actualizar*). Al vídeo con la solución de cada ejercicio puede llegarse directamente pinchando sobre (Solución) al lado del encabezado de cada problema (Problema X). Si el enlace dirige a un vídeo privado es porque la solución se publicará pronto. Si el enlace dirige a la página principal del canal es porque la solución no está cargada, pero lo estará. Si una comunidad tiene un "Problema X" sin enunciado es para señalar que el examen está incompleto, pero por alguna razón la solución de ese problema no la estoy contemplando. Lo que escriba con esta typo es una anotación sobre el ejercicio, normalmente con información complementaria. Estaré agradecido de que cualquier error que detectes, tanto en las soluciones de los ejercicios como en los aspectos técnicos de este documento (faltas de ortografía, enlaces rotos, etc...) me los hagas llegar (tienes el correo arriba). Si tienes enunciados y quieres que se resuelvan, también son bienvenidos. Notese que, ante la imposibilidad de conseguir los enunciados oficiales, la mayoría de los problemas son transcritos de memoria por algún opositor, lo que lleva, muy lógicamente, a que algunas veces contengan algún error mínimo: No, no voy a resolver de nuevo los ejercicios con "errores" en los enunciados, lo importante es el proceso de resolución y el número es solo una excusa. Verdaderos errores, cuando sean detectados, se comentarán en un pdf adjunto como Fe de Erratas.

Índice

1. Andalucía 2021

Problema 1. (Solución -a-) (Solución -b-)

(a) Se lanzan n monedas una detrás de otra. En cada lanzamiento, la probabilidad de obtener cara es p. Si se han obtenido k caras, $0 \leq k \leq n$, ¿cuál es la probabilidad de que haya aparecido cara en la primera moneda?

(b) Demuestre que todo número complejo z de módulo 1, con $z \neq 1$ puede escribirse de la forma

$$\frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \mu \in \mathbb{R}$$

Halle μ en función del argumento de z.

Problema 2. (Solución -a-) (Solución -b-)

(a) Estudie los extremos de la función

$$f(x) = |2x-1|e^{-|x-2|}, \quad x \in [-3,3]$$

(b) Estudie el límite de la sucesión definida por

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$$

Problema 3. (Solución -a-) (Solución -b-)

(a) Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

(b) Dado el triángulo ABC, pruebe que es rectángulo si y solo si se cumple

$$sin^2 A + sin^2 B + sin^2 C = 2$$

Otra solución para la opción a (Solución -a-)

Problema 4. (Solución)

(a) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Pruebe que si un vector v depende linealmente de $\{u_1, u_2, u_3\}$ pero no depende linealmente de $\{u_2, u_3\}$, entonces u_1 depende linealmente de $\{v, u_2, u_3\}$

(b) En el espacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios

$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad S_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad S_3 : y + z = 0$$

1. Halle $dim\,(S_1 + S_2)$ y $dim\,(S_1 \cap S_2)$
2. Halle una base de $S_1 \cap S_3$
3. ¿Qué dimensión tiene $S_1 + S_3$

Problema 5. (Solución -a-) (Solución -b-)

(a) Halle el volumen del toro de revolución que se obtiene al girar la circunferencia

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2 \quad (0 < b < a)$$

alrededor del eje de ordenadas.

(b) Siendo

$$a_n = \frac{n^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

el término general de una serie, se pide:

1. Sustituya el exponente k por el mayor número entero compatible con la condición de ser convergente de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
2. Halle la suma de la serie para dicho k.

Problema 6. (Solución -a-) (Solución -b-)

(a) Sea $\Upsilon = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{es múltiplo de} 20210\}$. Pruebe que si

$$(\alpha + \sqrt{85}\beta) \in \Upsilon \text{ y } (\sqrt{85}\alpha - \beta) \in \Upsilon$$

entonces $\alpha^2 + \beta^2 \in \Upsilon$.

(b) Se colocan al azar cuatro bolas en tres urnas.

1. Describa la distribución de la variable aleatoria

$$X = \text{"número máximo de bolas que hay en alguna urna"}$$

2. Halle $E(X)$.

2. Murcia 2021

Problema 1.(Solución)

Los números reales no negativos $a_1, a_2, \dots, a_n$ cumplen las condiciones

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2n$
- $\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \cdots + \binom{a_n}{2} = n$

Probar que $a_i = 2, \forall i$.

Solución en pdf (pdf)

Problema 2.(Solución)

Calcular el valor de

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 & x^4-x^3+x-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 & x^4-2x^3+2x-4 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 & x^4-3x^3+3x-9 \\ 4x-16 & x^2-16 & x^3-64 & x^4-4x^3+4x-16 \end{vmatrix}$$

Problema 3.(Solución)

¿Qué funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sean integrables en cualquier intervalo $[0, x]$ si $x > 0$ y $[x, 0]$ si $x < 0$, satisfacen la condición:

$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

para cualquier número real distinto de cero?

Problema 4. (Solución)

Los puntos $A(11, 13)$, $B(8, 14)$, $C(3, 7)$, $D(9, 1)$ situados en el plano cartesiano, están sobre los lados consecutivos de un cuadrado o sobre sus prolongaciones. Hallar la longitud del lado del cuadrado.

Problema 5. (Solución)

Tres fábricas manufacturan un producto. Sabemos que las dos primeras producen el mismo número de productos y que la tercera produce el doble de productos que las don anteriores durante un periodo de tiempo especificado, el mismo para las tres. Sabemos también que el 4 % de los productos manufacturados por la primera fábrica es defectuoso y que el 2 % de lo producido por cada uno da las otras dos fábricas también es defectuoso. Si colocamos juntos todos los productos fabricados y se escoge uno al azar,

1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
2. Suponiendo que elegimos un producto al azar y resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la primera fábrica?

3. Extremadura 2021

Problema A1. (Solución)

Calcula tres números positivos x, y, z tales que su suma es 30 y la expresión x^2yz^3 es máxima.

Problema A2. (Solución)

Se considera una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y de radio R. Se considera una recta variable paralela al eje OY que corta a la circunferencia en dos puntos A y A'. Hallar el lugar geométrico de los puntos P en que se cortan las rectas que unen los puntos de intersección A y A' con los puntos de intersección de la circunferencia con el eje OX.

Problema A3. (Solución)

Los coeficientes de la ecuación $x^2 + Ax + B = 0$ se eligen al azar en el intervalo $(-1, 1)$. Calcula la probabilidad de que las raíces de esta ecuación sean reales y positivas.

Problema A4. (Solución)

Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabiendo que es impar, que $F(1) = 1$, y que verifica la relación

$$\int_{-a}^{a} (a^x - x^2) f'''(x) dx = a^2$$

Problema B1. (Solución)

17 personas van a jugar a un casino y se reparten fichas de igual valor a partes iguales, sobrando tres, 6 de los jugadores se encuentran cansados y deciden irse a dormir. El resto vuelve a repartir las fichas sobrando cuatro. Al fin, sólo 6 deciden jugar, repartiendo de nuevo sobrando cinco fichas. Calcula el número total de fichas sabiendo que es un número comprendido entre 1500 y 3000.

Problema B2. (Solución)

Sea $(2\mathbb{Z}, +, \perp)$ el conjunto de los números enteros pares, donde $+$ es la suma y $\perp$ es la ley de composición definida por $x \perp y = \frac{xy}{2}$. Justificar que $(2\mathbb{Z}, +, \perp)$ es un anillo.

Problema B3. (Solución)

Halle el volumen del toro de revolución que se obtiene al girar la circunferencia $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ alrededor del eje OX.

Problema B4. (Solución)

Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

Estudia para qué valores de a es diagonalizable.

Problema C1. (Solución)

Calcula
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{(k-n)^2}{n^4}}$$

Problema C2. (Solución)

Por los puntos $A(a,0)$ y $B(b,0)$ se trazan las tangentes a circunferencias de centro el origen de coordenadas y radio variable. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de dichas tangentes.

Problema C3. (Solución)

Si $p\in\mathbb{R}$ y las raíces de $x^3+2px^2-px+10=0$ están en progresión aritmética, calcula dichas raíces.

Problema C4. (Solución)

Calcular la probabilidad de, elegido un punto al azar del interior de una elipse, esté dentro del cuadrado inscrito.

4. Madrid 2021

Problema 1. (Solución)

Dos arqueros, A y B, participan en una competición clasificatoria. Mediante un sorteo previo se decide que inicia la actuación el tirador A. A dispara una flecha, y se clasifica si da en el centro de la diana. Si no lo consigue, es B quien toma la iniciativa y gana la competición si logra dar en el centro de la diana. En caso contrario, vuelve a tirar A y se repite el proceso descrito anteriormente. De este modo, se van alternando los tiros hasta que uno acierta con el centro de la diana, momento en el que termina la competición con la clasificación del arquero que lo ha conseguido. En cada uno de sus tiros A y B tienen, respectivamente, probabilidad p y q de alcanzar el centro de la diana.

(a) Hallar la probabilidad de que el arquero A se clasifique.

(b) Calcular la probabilidad de que sea el arquero B.

(c) ¿Qué condición han de verificar p y q para que el arquero B tenga ventaja sobre A? ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

Problema 2. (Solución)

Se consideran los siguientes elementos en el plano:

$$c\equiv \text{ circunferencia de centro } C(0,a) \text{ y radio } a \text{ con } a>0$$

$$s\equiv \text{ recta horizontal que pasa por el punto } (0,2a)$$

Se dibuja una recta r que pase por el origen de coordenadas y cualquier punto $M(x_0,y_0)$ de la circunferencia distinto del origen de coordenadas. Sea N el punto de intersección de la recta anterior con la recta s. Se considera la curva que se obtiene por la intersección de la recta horizontal que pasa por M y la recta vertical que pasa por N al recorrer M la circunferencia c.

(a) Determinar la ecuación de la curva.

(b) Hallar el área de la región delimitada por la curva y el eje de abscisas.

Problema 3. (Solución) VER EXTREMADURA 2018 PROBLEMA 1

Un hombre acude a un banco para cobrar un cheque por valor de E euros y C céntimos. El cajero, por error, le entrega un sobre con C euros y E céntimos. El cliente no se da cuenta del error hasta que gasta 23 céntimos y, además, observa que en ese momento tiene $2E$ euros y $2C$ céntimos. ¿Cuál es el valor del cheque?

Problema 4. (Solución)

Dado el determinante de orden n

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \cdots & 3 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

(a) Calcula su valor.

(b) Determinar para qué valores de n dicho determinante es múltiplo de 10.

5. Comunidad Valenciana 2021

Problema 1. (Solución)

Los números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ forman una sucesión denominada sucesión de Fibonacci F_n que se define de forma recursiva como

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-1}F_{n-2},\ \text{para } n \geq 3$$

1. Demuestre que dos números de Fibonacci consecutivos son primos entre si.

2. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
demuestre que
$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

3. Compruebe que la matriz A del apartado anterior es diagonalizable y calcule la matriz $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP = D$ siendo $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ la matriz diagonal. Utiliza este resultado para obtener el término general de la sucesión F_n como una fórmula no recursiva (fórmula de Binet).

4. Deducir de (2) y (3) la identidad de Cassini:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Problema 2. (Solución)

Estudia la continuidad de la función real de variable real $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x = p/q \text{ (irreducible)} \end{cases}$$

Problema 3. (Solución)

En un triángulo ABC, suponemos que las rectas tangentes a la circunferencia circunscrita en B y en C se cortan en un punto P. Demostrar que la recta AP es simétrica a la mediana del lado BC respecto de la bisectriz del ángulo A.

Problema 4. (Solución)

El cáncer colorectal (CCR) constituye un problema de salud pública a nivel mundial. En los países miembros de la Unión Europea como en el resto de los países desarrollados representa, en ambos sexos, el segundo cáncer más frecuente y una de las principales causas de muerte. Entre las diversas opciones que existen, los Test de Sangre Oculta en Heces (TSOH) han sido los primeros en ser evaluados en ensayos clínicos controlados y que han recibido una mayor atención, además que, desde un punto de vista práctico, su bajo coste y la facilidad de su aplicación le convierte en una opción atractiva para la detección del CCR. En uno de los estudios en los que se va a utilizar dicha prueba diagnóstica, la probabilidad de que un paciente con CCR sea detectado (que la prueba sea positiva) es de un 68 %, y la probabilidad de que un paciente que no presente CCR sea detectado (que la prueba sea negativa) es de un 98 %. La Conselleria decide utilizar esta prueba diagnóstica (TSOH) sobre la población perteneciente al departamento de Salud 7 (Valencia-La Fe) en el cual la prevalencia de cáncer de colon es del 3 %, calcula:

1. La probabilidad de que al realizar la prueba a un paciente con CCR, el resultado sea positivo.

2. La probabilidad de que, si al realizar la prueba resulta positiva, el paciente presente CCR.

3. La probabilidad de que, si al realizar la prueba el resultado es negativo, el paciente no presente CCR.

4. ¿Cuántas veces es más probable que el paciente presente CCR si el resultado de la prueba es positivo que si no sabemos el resultado?

5. ¿Cuántas veces es más probable que el paciente presente CCR si el resultado de la prueba es positivo que si es negativo?

6. La unidad de investigación de estadísticas sanitarias del Hospital Universitario de Alicante ha decidido aplicar esta prueba diagnostica sobre la población que acude al servicio de Urgencia, en el que la prevalencia de cáncer de colon es del 30 %. Calcula de nuevo los resultados pedidos en los apartados anteriores e interprétalos.

NOTA: En epidemiologia, se denomina prevalencia a la proporción de individuos de un grupo o una población (en medicina, persona), que presentan una característica o un suceso determinado (en medicina, enfermedad).

6. Castilla La Mancha 2021

Problema 1. (Solución)

Un segmento se divide en tres por dos puntos elegidos de forma aleatoria.

(a) Halle la probabilidad de que con los tres segmentos obtenidos se pueda construir un triángulo.

(b) Suponiendo que se puede construir el triángulo, halle la probabilidad de que sea acutángulo.

Problema 2. (Solución)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

1. Encuentre la fórmula para calcular A_n para cada n.
2. Halle $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A_{n+1}}$

Problema 3. (Solución)

Un número natural n se dice que es perfecto cuando la suma de sus divisores propios es el propio n.

(a) Demuestre que si $2^k - 1$ es primo, entonces $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ es perfecto.

(b) Demuestre que si n es perfecto y par, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ con $2^k - 1$ primo.

Problema 4. (Solución)

Encuentre un polinomio

$$P(x) = x^3 + Ax + B \in \mathbb{R}[x]$$

cuyas raíces tengan como afijos tres vértices consecutivos de un pentágono regular de lado 1.

7. Aragón 2021

Problema I1. (Solución)

Determine dos fracciones irreducibles a/c y b/d, sabiendo que su diferencia es $5/6$, que el máximo común divisor de a y b es $a - b$ y que el mínimo común múltiplo de a y b es 1050.

Problema I2. (Solución)

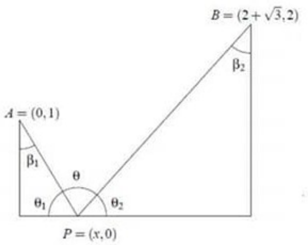
En un espacio vectorial real E de dimensión 4 se consideran dos subespacios vectoriales V y W que, con respecto a determinada base de E, vienen descritos por las ecuaciones:

$$V : \begin{cases} x - ay + z + bt = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} ax - y - bz + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$a, b \in \mathbb{R}$. En función de a y b, calcule las dimensiones de los subespacios V, W, $V \cap W$ y $V + W$.

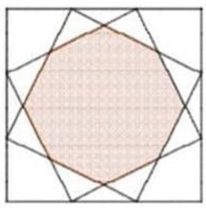
Problema I3. (Solución)

Halle las coordenadas del punto P en la figura para que el ángulo θ sea máximo y calcule ese valor máximo.



Problema I4. (Solución)

El área sombreada de la figura mide 100 cm^2. Los dos cuadrados menores que se superponen son iguales. El lado del cuadrado mayor queda dividido en tres segmentos de igual longitud por los vértices de los cuadrados menores. Calcule el área del cuadrado más grande.



Problema I5. (Solución)

(a) Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. Dos jugadores A y B, extraen sucesivamente y con reemplazamiento una bola de la urna. El juego se detiene cuando A extrae una bola blanca (siendo A el ganador del juego) o cuando B extrae una bola negra (siendo B el ganador del juego). Se supone que el primero jugador en extraer bola es A. Calcular la probabilidad de que A gane la partida y la probabilidad de que B gane la partida.

(b) La función de densidad de una variable aleatoria es

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabiendo que $P(1/2 < x < 1) = 0,16666$, determinar a y b.

Problema II1. (Solución)

(a) Demuestre que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) Calcule

$$S = \sum_{k=1}^{n} \log \left(\frac{k+1}{k} \right)^k$$

Problema II2. (Solución)

En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, siendo

$$\beta\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$$

una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se consideran los subconjuntos:

$S_2 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^t\}$

$U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$

V como el sistema generado por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Probar que U es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de $V\mathcal{S}_{\in}$ respecto de la base canónica.

(c) Dar las ecuaciones paramétricas e implícitas de U respecto de la base β.

(d) Razonar si son o no ciertas las siguientes afirmaciones, sabiendo que W es un espacio vectorial de dimensión 2021:

   (i) En W pueden existir 2022 vectores formando un sistema generador.

   (ii) 2020 vectores distintos de W siempre son linealmente independientes.

Problema II3. (Solución)

(a) Tenemos dos urnas que contienen un 60 % de bolas rojas y un 40 % de bolas azules la primera y 20 % de bolas rojas y 80 % de bolas azules la segunda. Seleccionamos una de las urnas al azar y se extraen 10 bolas con reemplazamiento resultando $B = r, a, a, r, r, r, a, r, a, a$ siendo r bola roja y a bola azul. Averigüe cuál es la probabilidad de que la extracción haya sido realizada de la primera urna.

(b) Tomamos al azar las letras de la palabra *oposición* y con ellas formamos una palabra. Calcule la probabilidad de que la primera letra de esa palabra sea una vocal y la última una consonante.

Problema II4. (Solución)

Los puntos $A(-3, -1, 3)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 0, -2)$, $D(1, -2, -1)$ son los vértices de un tetraedro

(a) Calcule las ecuaciones implícitas de lar recta r que pasa por el baricentro de la base BCD y por el punto A.

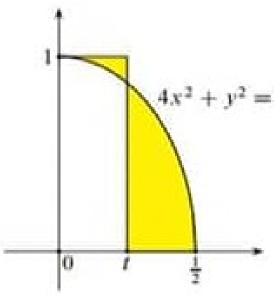
(b) Halle la ecuación del plano π que contiene la base del tetraedro que forman los vértices B, C y D.

(c) Calcule la ecuación del plano π' paralelo a π que pasa por los puntos medios de los segmentos AB, AC y AD.

(d) Halle el punto P del plano π' que pertenece a r. Calcule la distancia de P a la base BCD. ¿Qué relación hay entre la distancia de P al vértice y la distancia de P a la base BCD?

Problema II5. (Solución)

Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función $S(t)$ en el intervalo $[0, 1/2]$. Dicha función nos permite calcular el área sombreada en la figura, que está comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$ donde $0 \leq t \leq 1/2$.



8. Castilla y León 2021

Problema 1. (Solución)

ncuentra un número de 5 cifras distintas, no nulas, de forma que la suma de las variaciones ternarias sin repetición de esas cifras coincida con el propio número.

Problema 2. (Solución)

Tres cilindros iguales de radio R, con $0 < R < 1$, están colocados de modo que sus ejes forman un triángulo equilátero de lado$2\sqrt{3}$ metros. Calcular el volumen limitado por los tres cilindros y los dos planos tangentes a los tres cilindros.

Problema 3. (Solución)

Los números complejos a, b y c son los vértices de un triángulo rectángulo en el plano complejo. Sabiendo que $a + b + c = 0$ y que $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 150$, hallar el valor de la hipotenusa de dicho triángulo.

Problema 4. (Solución)

En el espacio vectorial de las sucesiones de números reales sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones $(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$; $\lambda \cdot (a_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda a_n)_{n=1}^{\infty}$, se considera el subespacio vectorial definido por las sucesiones que verifican:

$$\Gamma = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{con} n \geq 3, a_1, a_2\right\}$$

(a) Demostrar que las progresiones geométricas de Γ con $a_1 = 1$, forman una base de Γ.

(b) Obtener las componentes en dicha base y el término general, de las sucesiones de Γ definidas por:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ (sucesión de Fibonacci)

$b_1 = 1$, $b_2 = 3$ (sucesión de Lucca)

Problema 1 (COVID). (Solución)

Un bombo contiene bolas numeradas con números naturales mayores que 0 que se emplean para un juego. Para jugar, se mezclan las bolas y se extraen dos al azar. Si la suma de las bolas extraídas es par, se gana el juego. Si la suma de las bolas extraídas es impar, se pierde el juego. Un juego es justo si la probabilidad de ganar es igual a la probabilidad de perder. Determinar las condiciones bajo las que se configuran TODAS las posibilidades de que el juego descrito sea justo.

Problema 2 (COVID). (Solución)

Dada la función $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2-1}$, $x > 0$, $x \neq 1$,

(a) Analizar si es posible extender el dominio de definición de f a $x \geq 0$ como función derivable.

(b) Estudiar monotonía, existencia y cálculo de puntos extremos, y las posibles asíntotas de la función.

(c) Calcular $\lim_{b \to +\infty} \int f(x)dx$

Problema 3 (COVID). (Solución)

En el espacio afín euclídeo tridimensional $\mathbb{R}^3$ se consideran las siguientes rectas r y s:

$$r \equiv x?1 = \frac{y?1}{?2} = zs \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Obtener la matriz asociada al movimiento f que transforma r en s, verificando $f(1, 1, 0) = (1/2, 1, 1/2)$.

Problema 4 (COVID). (Solución)

Sea el espacio vectorial M_n de las matrices $n \times n$ de números reales. Para la matriz $A = [a_{ij}] \in M_n$ se define: $D(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 1$. Sea f el endomorfismo definido por $f : M_n \to M_n$ que asigna $A \to D(A) \cdot I_n$ siendo I_n la matriz identidad. Calcular los valores propios de f y estudiar si f es diagonalizable.

9. Galicia 2021

Problema 1.1. (Solución)

Sea $P_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Sea $f : P_3(x) \to P_3(x)$ definida por:

$$f[p(x)] = \beta p(x) + p'(x), \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Probar que f s una aplicación lineal.

(b) Hallar su núcleo, su imagen y clasificar f según los valores de β.

(c) Suponiendo $\beta = 1$, hallar la matriz asociada a f, cuando se considera en $P_3(\mathbb{R})$ la base $B = \{2, x+1, x^2-1, x^3+1\}$ tanto en el espacio inicial como en el espacio final.

Problema 1.2. (Solución)

Hallar el volumen del sólido mayor obtenido en un cono recto de base circular de radio 2 cm, al cortarlo con un plano paralelo al eje del cono a una distanca de una unidad de dicho eje. La altura del cono es 6 cm.

Problema 1.3. (Solución)

(a) Demostrar que si n es par, los números naturales $n^2 - 1$ y $3n + 1$ son primos entre si.

(b) Demostrar que si $n = 30m$, entonces la cantaidad de números enteros positivos distintos de cero que no son mayores que n y que no se dividen por ninguno de los números 6, 10, 15 es igual a $22m$.

Problema 1.4. (Solución)

Sean b y c so números comprendidos entre 0 y 1. Hallar la probabilidad de que la ecuación

$$x^2 + 2b + c = 0$$

tenga raíces reales en los casos:

1. Que los números se elijan al azar e independientemente.
2. Que la función de densidad del par (b, c) sea:

$$f(b,c) = \begin{cases} \frac{3}{2}(b^2 + c^2), & b, c \in (0,1) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Problema 1.5. (Solución)

La recta tangente a la parábola P de ecuación $y^2 = 2x$ en uno de sus puntos $M \in P$ corta al eje de ordenadas en el punto A. La recta normal a P en el mismo punto M corta a dicho eje en B. Hallar la ecuación del lugar geométrico que describe el baricentro G del triángulo formado por los puntos A, B y M cuando el punto M recorre la parábola P.

Problema 2.1. (Solución)

Considera en $\mathbb{R}^4$ los subespacios:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z - t = 0; z - t = 0\} \qquad T = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$$

(a) Obtener una base de $S + T$.

(b) Razonar por qué la suma $S+T$ es directa.

(c) Determinar si $v(7,1,5,5)$ pertenece a $S+T$ y en caso afirmativo descomponer v como suma de un vector v_S en S y un vector v_T en T.

(d) ¿Son S y T complementarios uno del otro?

Problema 2.2. (Solución)

Dado un cuadrante AB, de una circunferencia del centro O y radio R, determinar sobre él un punto M de mode que la superficie del cuadrilátero determinado por los radios OA, OB y por las tangentes al arco trazadas por M y por A tenga área mínima.

Problema 2.3. (Solución)

Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-[x]}{2^{[x]}}dx$$

donde $[x]$ es la parte entera de x.

Problema 2.4. (Solución)

Disponemos de dos urnas con N bolas cada una, numeradas de 1 a N en ambas. Se extrae simultáneamente una bola de cada urna y sin devolverlas repetimos esta operación, hasta vaciar las urnas.

(a) Hallar la probabilidad de que en ninguna de las extracciones los números de las bolas coincidan.

(b) Hallar el límite de dicha probabilidad cuando N tiende a infinito.

Problema 2.5. (Solución)

Dada una circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 2, se trazan por el origen de coordenadas dos rectas variables que forman entre sí un ángulo de $30°$. Sean A y B los puntos medios de las cuerdas que cada una de ellas intercepta en la circunferencia. Sea M el punto medio de AB. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.

10. Ibiza y Formentera 2021

Problema A1. (Solución)

Una matriz cuadrada se dice mágica si y solo si la suma de los elementos de sus filas, de sus columans y de sus diagonales, son todos iguales.

(a) Demostrar que cualquier matriz M es la suma de una matriz simétrica M_1 y una matriz antisimétrica M_2.

(b) Demostrar que la suma de matrices mágicas es también una matriz mágica, y que el producto de un escalar por una matriz mágica es también una matrix mágica.

(c) Calcule todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.

(d) Constuya todas las matrices mágicas simétricas de orden 3 (podría ser recomendable comenzar por las matrices mágicas de suma nula y después generalizar a la suma $s \neq 0$).

(e) Demostrar que las matrices mágicas de orden 3 forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuál es su dimensión?.

Problema A2. (Solución)

Determinar el área limitada por el eje OX, la curva de ecuación

$$y = 2\sin^2 x - 3\cos x$$

y dos abcisas separadas entre sí per una distancia igual a un periodo de la curva.

Problema A3. (Solución)

La recta tangente a una circunferencia de radio r, trazada en un punto A de la circunferencia, lleva marcado un segmento AN de longitud igual a la del arco de circunferencia AM (tomado en el mismo sentido). La recta MN corta a la recta AO (siendo O el centro de la circunferencia) en el punto B. Calcule $\lim_{N\to A} OB$.

Problema A4. (Solución)

Dos jugadores A y B juegan, alternativamente, partidas a un juego. Gana el juego el primer jugador que consiga ganar una partida. La probabilidad de que A gane sus partidas es p_1, y la probabilidad de que B gane las suyas es p_2, con $p_2 > p_1$. Para compensar la ventaja que tiene, B deja que A juegue la primera partida. Qué relación han de cumplir p_2 y p_1 para que el juego sea justo, es decir, para que A y B tengan la misma probabilidad de ganar el juego.

Problema B1. (Solución)

Sea la ecuación

$$z^3 + (2i - 9)z^2 + (23 - 13i)z + 6(i - 5) = 0$$

(a) Encuentra sus raíces sabiendo que tiene una raíz real.

(b) Suponiendo que los afijos de estas raíces son tres vértices de un paralelogramo, encuentra los complejos que podrían corresponder a un cuarto vértice.

Problema B2. (Solución)

Calcule la integral indefinida de la función dada por el desarrollo del siguiente determinante:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & \ln x & (\ln x)^2 & (\ln x)^3 \\ 1 & \ln x^2 & (\ln x^2)^2 & (\ln x^2)^3 \\ 1 & \ln x^3 & (\ln x^3)^2 & (\ln x^3)^3 \\ 1 & \ln x^4 & (\ln x^4)^2 & (\ln x^4)^3 \end{vmatrix}$$

Problema B3. (Solución)

Considere un cuadrado de lado $2a$. Determinar el área de la región formada por los puntos del cuadrado que están más cerca del centro que de cualquiera de los lados.

Problema B4. (Solución)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x^2}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Encontrar el valor de k.

(b) Encontrar la función de distribución de la variable X.

(c) Encontrar $P(-1 \leq X \leq 1)$

(d) Encontrar la media aritmética X.

11. Navarra 2021

Problema 1 (Castellano). (Solución)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

demostrar que $\forall n \geq 2$ se cumple

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & \binom{n}{1}a^{n-1}b & \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & \binom{n}{1}a^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Problema 2 (Castellano). (Solución)

Dada la función eficiencia que viene expresada por

$$E(\phi) = \frac{\tan\phi(1 - m \cdot \tan\phi)}{m + \tan\phi}$$

con $m \in (0, 1]$ fijo:

1. Probar que
$$\frac{dE}{d\phi} = \frac{m(1+t^2)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)}{(m+t)^2},$$
donde $t = \tan\phi$ y a_i son coeficientes a determinar que dependen de m.

2. Demostrar que
$$\frac{dE}{d\phi} = \frac{-m \cdot \sec^2\phi(-\cos(2\phi) + m \cdot \sin(2\phi))}{(m \cdot \cos\phi + \sin\phi)^2}$$

3. Calcular los valores de $\phi \in \mathbb{R}$ que dan la eficiencia máxima para cada m.

Problema 3 (Castellano). (Solución)

La curva $y^3 - x^3 = 1$ y las tangentes a la misma en sus puntos de invlexión determinan una región acotada. Hallar su área.

Problema 4 (Castellano). (Solución)

El tiempo, en minutos, que un documento espera en una cola de impresión es una variable aleatoria continua, ζ, con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{si} \quad 0 < x < 5 \\ k(10-x), & \text{si} \quad 5 < x < 10 \\ 0, & \quad \text{en el resto} \end{cases}$$

1. Calcular el valor de k.
2. Calcular la probabilidad de que un documento tenga que esperar menos de 3 minutos.
3. Calcular la probabilidad de que un documento tenga que esperar más de 9 minutos.
4. Calcular la probabilidad de que un documento tenga que esperar entre 4 y 7 minutos.
5. Un documento lleva 4 minutos en la cola, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar al menos 3 minutos más?
6. Un documento lleva 6 minutos en la cola, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 9 minutos?
7. Calcular el tiempo medio de espera.

Problema 1 (Castellano-COVID). (Solución)

Dadas
$$f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2} dt\right]^2$$
y
$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$
Demostrar que $F(x) = f(x) + g(x)$ es una constante y determinarla.

Problema 2 (Castellano-COVID). (Solución)

Sea $\mathbb{P}_3(t)$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la variable t. Se considera la aplicación:
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_3(t) \text{dada por} f(x,y,z) = xt^3 + yt + (y+z)$$

1. Demostrar que es una aplicación lineal.
2. Hallar la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{P}_3(t)$
3. ¿Es f biyectiva? Razónalo.

4. Hallar la matriz coordenada de f respecto de las bases

$$\beta = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\} \qquad\qquad \beta' = \{t^3, t^2+t, t+1, 1\}$$

Problema 3 (Castellano-COVID). (Solución)

Sea ABC el triángulo acutángulo con $AB \neq AC$ y con baricentro G. Llamémosle M al punto medio de BC y consideramos la circunferencia con centro G y radio GM. Llamemos N a la intersección de la circunferencia con BC (distinta de M).

1. Calcular el punto simétrico de A con respecto de N.
2. Siendo S el punto simétrico del apartado anterior, demostrar que GS es perpendicular a BC.

Problema 4 (Castellano-COVID). (Solución)

Una enfermedad tiene una incidencia de un 2 % en la población. Se ha creado un test con una fiabilidad del 90 %.

1. ¿Cuál es la probabilidad de dar positivo en 2 test si se realizan 10 test?
2. ¿Cuál es la probabilidad de tener realmente la enfermedad si el resultado es positivo en el test?
3. Si la enfermedad se extiende por la población y el 70 % de los habitantes están enfermos, ¿cuál es la probabilidad de que al hacer 5 pruebas alguna sea positiva?

Problema 1 (Euskara). (Solución)

1. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{N}$$
2. Hallar el área que encierra la función $f(x)$ con el eje OX, siendo
$$f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}, x \in \mathbb{R}$$
en el intervalo $[-1, 0]$.

Problema 2 (Euskara). (Solución)

Sea $\beta = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V. Se consideran los conjuntos $\beta' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $\beta'' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ donde:

$$\begin{array}{llll} v_1 = (2,-2,0,1) & v_2 = (1,1,1,0) & v_3 = (3,0,1,-1) & v_4 = (0,-2,-1,1) \\ w_1 = (0,1,0,3) & w_2 = (-1,1,0,0) & w_3 = (-2,0,-1,2) & w_4 = (-1,-1,-1,1) \end{array}$$

respecto a la base β. Se pide:

1. Probar que β' y β'' son bases de V.
2. Hallar la matriz de cambio de base de β' a β''.

3. Determinar las coordenadas respecto de β' del vector x cuyas coordenadas respecto de β'' son $(0, -6, 3, -5)$.

Problema 3 (Euskara). (Solución)

Dada una cierta función f definida sobre $\mathbb{R}$ y derivable en todo su dominio, definimos

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(-x)-2f(0)+f(x)}{x^2} & x \neq 0 \\ m & x = 0 \end{cases}$$

- Probar que si existe $f''(0)$ y $m = f''(0)$, entonces g es continua en $\mathbb{R}$.
- Probar que si f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$ y existe $f'''(0)$, entonces g es derivable en todo $\mathbb{R}$. Calcular $g'(x)$.
- Aplicando el primer apartado, evaluar para $\alpha > -1$ el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^\alpha - 2n^\alpha + (n+1)^\alpha}{n^{\alpha-2}}$$

Problema 4 (Euskara). (Solución)

Sobre el diámetro horizontal de una circunferencia de radio 5 y centro O se toma un punto F tal que $|\overline{OF}| = 3$. Se traza por F una recta variable r que corta a la circunferencia en un punto A. Por A se traza la recta perpendicular s a la recta r. Hallar la envolvente de estas rectas s.

Problema 1 (Euskara-COVID). (Solución)

1. Sean f y g funciones n-veces derivables, probar que la derivada n-ésima de su producto es:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

2. Siendo $h(x) = e^x \sin x$, calcular $h^{(4)}(\pi/2)$.

Problema 2 (Euskara-COVID). (Solución)

Considerar $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{Q}^4 | x = 3z\}$ y T generado por $(3, 2, 1, 2), (3, -3, 1, -3)$, y $(3, 0, 1, 0)$.

1. Comprobar que T es subespacio de S.
2. Hallar un abase de T y completarla hasta base de S.
3. Hallar un subespacio U de dimensión 3 tal que $T = S \cap U$.

Problema 3 (Euskara-COVID). (Solución)

Hallar las tangentes del astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a > 0)$ que están más alejadas del origen.

Problema 4 (Euskara-COVID). (Solución)

Sea X la variable aleatoria que toma el valor 0 y 1 si sale cara o cruz respectivamente, al lanzar una moneda. Si sale cara, se introduce una bola blanca en una urna que contiene 3 bolas negras y 2 blancas, y si sale cruz, se introduce una bola negra. Sea Y la variable aleatoria que indica el número de bolas blancas obtenido al sacar dos bolas de la urna.

1. Describir la situación matemáticamente.

2. Realizar la tabla de distribuciones conjunta.

3. Estudiar e interpretar la relación entre las variables X e Y realizando las explicaciones y cálculos oportunos.

12. Comunidad Valenciana 2019 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Sean $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal con matriz asociada en la bases e_i de $\mathbb{R}^4$ y e'_i de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula la expresión matricial de la aplicación.

(b) Calcula $Kerf$ y una base suya.

(c) Calcula $Imgf$ y una base suya.

(d) Escribe las bases canónicas de f respecto a $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$

Problema 2. (Solución)

Demostrar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30 % del volumen de la esfera.

Problema 3. (Solución)

En el sorteo de la primitiva se juega con 49 números. Se eligen 7, dónde 6 de ellos son la combinación ganadora y 1 es el reintegro. Se permite hacer apuestas múltiples de r números. Calcular:

(a) la probabilidad de tener 5 números de la combinación ganadora habiendo realizado una apuesta múltiple de 10 números.

(b) la probabilidad de tener k números de la combinación ganadora con una apuesta de r números.

(c) la probabilidad de tener k números de la combinación ganadora y el reintegro con una apuesta de r números.

Problema 4. (Solución)

Sea un trapecio, no isósceles, de bases AB y CD. Sea el punto E la intersección de los segmentos AD y BC, y sea el punto F la intersección de las rectas prolongación de los segmentos AC y BD. Consideremos la recta r que pasa por los puntos E y F. Demostrar que esta recta r corta ambas bases en sus puntos medios.

Problema 5. (Solución)

13. Galicia 2019 (Entrada Web)

Problema A1. (Solución)

El número de vehículos que atraviesan diariamente una zona de velocidad controlada por radar sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. Si la probabilidad de que un vehículo no respete el límite fijado es p, se pide:

(a) Encontrar la distribución del número de infracciones diarias detectadas por el radar.

(b) Si el radar detectó r infracciones, ¿cuál es la distribución del número de vehículos que atravesaron la zona controlada? ¿Cuál es la media de esta distribución?

Problema A2. (Solución)

Encontrar los criterios de divisibilidad por 4 y por 13. Aplicar dichos criterios para determinar el mayor número de seis cifras divisible por 4 y por 13.

Problema A3. (Solución)

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \frac{z}{1-i}$. Definimos $f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f^2, \ldots, f^{(n+1)} = f \circ f^n$ y llamamos $f^{(n)} = w_k$.

(a) Si $z = i$, hallar el menor $n \in \mathbb{N}$ posible para que $w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ sea real y calcula el valor correspondiente.

(b) Hallar $z^{1/6}$ sabiendo que $w_{200} = i$.

Problema A4. (Solución)

Problema A5. (Solución)

Tomando sobre el eje OX un punto $P(a, 0)$, construimos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ $(0 \leq a < r)$ el triángulo de vértices $P(a, 0), R(r, 0), Q(a, \sqrt{r^2 - a^2})$. Consideremos ahora el triángulo curvilíneo cuyos lados son: el segmento PQ, el segmento PR, y el arco de circunferencia QR. Calcular el límite del cociente de las áreas de los triángulos mencionados si hacemos tender a hacia r.

Problema B1. (Solución)

Los dos lados de un triángulo isósceles tiene una longitud l, cada uno, y el ángulo x entre ellos es el valor de una variable aleatoria X con función de densidad proporcional a $x(\pi - x)$ en cada punto $x \in (0, \pi/2)$. Calcular la función de densidad del área del triángulo y su esperanza.

Problema B2. (Solución)

Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros reales). Supongamos que si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Determinar todos los posibles polinomios P y Q.

Problema B3. (Solución)

Un cartel, situado en una pared, tiene sus bordes superior e inferiror a las alturas m y n, respectivamente, con referencia a la visual de un lector. ¿A qué distancia de lapared debe colocarse el lector del cartel para que el ángulo visual determinado por la pupila y los bordes sea máximo?.

Problema B4. (Solución)

Un cuadrado $ABCD$ de centro O y lado 1 se gira un ángulo α alrededor de O. Hallar el área común de ambos cuadrados.

Problema B5. (Solución)

14. Mallorca/Menorca 2019 (Entrada Web)

Problema A1. (Solución)

Al trazar las diagonales de un pentágono regular se forma en su interior un nuevo pentágono regular. ¿Qué relación existe entre las áreas de ambos pentágonos?

Problema A2. (Solución)

Demostrar que $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ es un múltiplo de 133 para todo $n \geq 1$ con $n \in \mathbb{N}$.

Problema A3. (Solución)

Determinar la longitud de arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$.

Problema A4. (Solución)
Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos 1 + \cos 2 + \cdots + \cos n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Problema B1. (Solución)

Un rayo de luz parte del punto $A(1, 0, 1)$ y se refleja sobre el plano de ecuación $x+2y+3z-1 = 0$ ¿En qué punto del plano se ha de producir la reflexión para que el rayo reflejado pase por el punto $B(2, 1, 1)$?

Problema B2. (Solución)

Demuestra que la sucesión siguiente, con $n \in \mathbb{N}$, converge, y determina su límite

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2 + \frac{a_n}{3}, \ n \geq 1 \end{aligned}$$

Problema B3. (Solución)

Una variable aleatoria X tiene una función de densidad definida por

$$f(x) = \frac{c}{x^2+1}, \quad \text{en } -\infty < x < \infty \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

(a) Determine el valor de la constante c.

(b) Determine la probabilidad de que $1/3 \leq X^2 \leq 1$

Problema B4. (Solución)

Sea

$$z = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

Probar que z es igual a 2 si n es múltiplo de 3 y que es igual a -1 en cualquier otro caso.

15. País Vasco 2018 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Sea p primo. Determinar todos los $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{k^2 - kp} \in \mathbb{Z}^+$.

16. Castilla y León 2018 (Entrada Web)

Problema 4. (Solución)

(a) Se eligen aleatoriamente $b, c \in [0, a]$. La probabilidad de que la distancia en $\mathbb{C}$ de las raíces de $z^2 + bz + c$ no sea mayor que 1, no es menor que $0,25$. Hallar a.

(b)

17. Navarra 2018 (Entrada Web)

Problema 1 (Castellano). (Solución)

Dados los siguientes subespacios vectoriales S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \langle (1,1,-2,1), (0,1,-1,2), (2,-1,-1,-4) \rangle$$

$$S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 3x + az = 0; x - 2y - 2t = 0\}$$

Hallar a para que $S_1 + S_2$ sea distinto de $\mathbb{R}^4$. En este caso, obtener la dimensión y una base de $S_1 \cap S_2$.

Fe de erratas: (pdf)

Problema 2 (Castellano). (Solución)

Dada la ecuación $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Se pide:

(a) Discutir las soluciones de la ecuación en función de los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

(b) Resolver la ecuación si $k = -27$.

Problema 3 (Castellano). (Solución)

Demostrar que la astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}$ es la envolvente de la familia de segmentos móviles de longitud constante L, cuyos extremos se apoyan en los ejes de coordenadas.

Problema 4 (Castellano). (Solución)

El número de piezas por minuto que llegan a una máquina de una industria automovilística es una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. Y el tiempo, en minutos, que transcurre entre las llegadas de un par de piezas, es una variable aleatoria T cuya función de densidad es:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si} t \geq 0 \\ 0 & \text{si} t < 0 \end{cases}$$

Suponiendo que $\lambda = 3$ en ambas variables aleatorias, se pide:

(a) Si en un periodo de 120 segundos ya han llegado al menos 3 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que en ese periodo lleguen como mucho 2 piezas más?.

(b) Obtener la función de distribución de probabilidad acumulada de T, y utilizala para calcular la probabilidad de que transcurran menos de 90 segundos entre las llegadas de un par de piezas.

ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE POSIBLES INTERPRETACIONES: (PDF)

Problema 1 (Euskara). (Solución)

Calcula a, b y c en la siguiente expresión para que sea del espacio vectorial de los polinomios de segundo grado $P_2[x]$.

$$P(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x - 1} + \frac{x^3 + bx^2 + cx + a}{x + 1} + \frac{x^3 + cx^2 + ax + b}{x - 2}$$

Siendo $P(x)$ el polinomio anterior, prueba que $B = \{x^2 + x + 1, x^2 - 1, P(x)\}$ es una base del espacio vectorial del grupo de polinomios de segundo grado $P_2[x]$, y calcula las coordenadas del polinomio $Q(x) = 2x^2 + 3x$ en esta base.

Problema 2 (Euskara). (Solución)

Se llama cicloide a la curva que describe un punto de una circunferencia al rodar por una linea recta. Si P es un punto de la circunferencia y r es el radio de la circunferencia, las ecuaciones paramétricas del cicloide son las siguientes:

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La circunferencia rueda por el eje OX y el punto P está en el origen cuando empieza, el ángulo θ es el ángulo que crea el punto P. Sabiendo que la recta $y = k$ corta el primer arco del cicloide, calcula el valor del parámetro k para que los arcos en que se divide midan lo mismo.

Problema 3 (Euskara). (Solución)

Sea P un punto de la parábola $y^2 = 2x$. La recta tangente que pasa por el punto P y la recta normal, cortan el eje OY en A y B respectivamente. Calcula la ecuación del lugar geométrico del baricentro del triángulo PAB cuando el punto se mueve por la parábola.

Problema 4 (Euskara). (Solución)

En una empresa de Leds se crean dos tipos de diodos (tipo A y tipo B). La "vida útil" del tipo A (en miles de horas) sigue una distribución normal con una media $\mu_A = 45$ y una desviación típica de $\sigma_A = 5$. El diodo tipo B sigue una distribución normal pero con una media $\mu_B = 42$ y una desviación típica $\sigma_B = 5$. Suponiendo que la "vida útil" de los diodos del ipo A y B sean independientes entre sí:

(a) Calcula la probabilidad de que la "vida útil" de los diodos A y B tengan una diferencia menor a 1000 horas.

(b) Para fabricar una bombilla se usan 35 diodos de tipo A. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 40000 horas, exactamente 30 sigan funcionando?.

(c) En una muestra aleatoria de 20 diodos de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que la media de "vida útil" esté entre 40000 y 43000 horas?.

Hay un error en la trascripción en relación al enunciado original. Allí, $\sigma_B = 7$: (pdf)

18. Andalucia 2018 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Dados la matriz $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, el vector $b \in \mathbb{R}^4$, $a \in \mathbb{R}$ y el subespacio F de $\mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-2 \\ a^2 \end{pmatrix} \qquad F \equiv \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\}$$

(a) Discutir y resolver cuando sea compatible el sistema $AX = b$, con $X \in \mathbb{R}^3$.

(b) Sea E el espacio columna de A, calcular sus ecuaciones implícitas.

(c) Encontrar una base del subespacio $E \cap F$.

(d) Calcular la matriz B de la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifica:

$$T(e_1) = A(e_2 + e_3), \quad T(e_2) = Ae_3, \quad T(e_3) = Ae_2,$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Fe de erratas apartado (d): (Solución). Notar que existe un error de transcripción entre la matriz A utilizada en el ejercicio que aquí se resuelve y la utilizada en el enunciado original.

Problema 2. (Solución)

Dados los puntos $A(1,2)$ y $B(3,3)$, se pide:

(a) Calcular la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el punto A y el foco en el punto B.

(b) Determinar como número complejo en forma binómica los vértices de un triángulo equilátero con centro en A, sabiendo que B es uno de sus vértices.

Problema 3. (Solución)

Consideramos la curva C de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$.

(a) De todos los triángulos inscritos en la curva C, con vértice en el punto $A(0,2)$ y base paralela al eje OX, calcular el que tiene máxima superficie.

(b) Calcular la ecuación de la envolvente de la familia de circunferencias que tienen centro en la curva C y que sus radios son la mitad del radio de C.

Problema 4. (Solución)

Consideremos la función $f(x) = \cos x$:

(a) Calcular la serie de Taylor de la función f.

(b) Demostrar que:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}$$

(c) Calcular el valor de $\int_0^1 \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx$ con un error menor que 10^{-3}.

Problema 5. (Solución)

Consideremos las funciones $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = 2 - x\int_0^x e^{-t^2} dt$.

(a) Estudiar y representar gráficamente la función f.

(b) Calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x) + 2 - x}{x \ln(1-x)}$$

Problema 6. (Solución)

Consideremos el conjunto $C = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Calcular la probabilidad de que sean reales las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ cuando los coeficientes b y c se eligen al azar entre los números del conjunto C.

(b) Supongamos un dado de cinco caras numeradas con los números de C. ¿Cuál es el número mínimo de veces que habría que lanzarlo para que la probabilidad de que salga al menos una vez el núemro 1 sea mayor que $0,9$?

19. Murcia 2018 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$:

(a) Demuestre que para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la sucesión

$$a_1, a_1^{a_2}, a_1^{a_2^{a_3}}, \dots$$

se hace constante módulo m para cualquier número natural m.

(b) Utilice el apartado anterior para demostrar que la sucesión

$$7, 7^7, 7^{7^7}, \dots$$

la cifra de las unidades se hace constante y calcule dicha cifra.

Observación: No confundir las expresiones de la forma $a_1^{a_2^{a_3}}$ con $(a_1^{a_2})^{a_3}$.

Solución en pdf mejorada con comentarios adicionales: (pdf)

Problema 2. (Solución)

Sean a y b números reales y sea A_n la matriz de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida como

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & ab & b & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a^{n-1} & a^{n-2}b & a^{n-3}b & a^{n-4}b & \cdots & b \end{pmatrix}$$

para $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$. Determinar:

(a) El determinante de A_n.

(b) Las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores columna de A_n.

(c) La dimensión del espacio cociente $\mathbb{R}^n/Ker(f)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal con matriz asociada A_n.

Problema 3. (Solución)

Sea b un número real positivo no nulo.

(a) Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{1}{1+be^{f(x)}}$, entonces $f(x) \le \frac{x}{b}$ para cada $x > 0$.

(b) Para a un número real positivo, calcule

$$\int_0^a \int_0^b e^{max\{(a^2/b^2)x^2, y^2\}} dxdy$$

Problema 4. (Solución)

Sean A, B, C, D cuatro puntos en una esfera de radio r tales que los puntos ABC forman un triángulo rectángulo en el plano que los contiene.

(a) Determine el volumen del tetraedro $ABCD$ y estudie si $\frac{2}{3}r^3$ es una cota superior para este volumen. En su caso, determine, si existe, un tetraedro con volumen $\frac{2}{3}r^3$.

(b) Determine el volumen del tetraedro $A_1B_1C_1D$, donde A_1 es el punto medio del lado AB, B_1 es el punto medio del lado BC y C_1 es el punto medio del lado CA, y su relación con el volumen del tetraedro $ABCD$.

Problema 5. (Solución)

Una prueba de selección en una empresa de análisis de datos consiste en realizar una jornada laboral de 8 horas, donde el aspirante debe emitir los análisis que le solicitan igual que el resto de trabajadores. La empresa sabe que el tiempo estimado por los aspirantes para realizar un análisis sigue una distribución normal con media μ y desviación típica $\mu/10$.

(a) Si la empresa fija como objetivo realizar al menos 100 análisis en una jornada laboral, determine el valor de μ que debería alcanzar un aspirante en su preparación para que no cumpla el objetivo con una probabilidad de 0.025.

(b) Si se sabe que un aspirante con $\mu = 2/25$ horas ha alcanzado el objetivo, determine el número máximo de análisis que ha realizado en la jornada laboral con una probabilidad de, al menos, $\frac{0.1587}{0.5}$.

20. Madrid 2018 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Sean C y C' dos circunferencias concéntricas de radios r y r' respectivamente, con $r < r'$. En la corona limitada por C y C' existen ocho circunferencias C_i, con tangentes a C y C' y de tal modo que C_i es tangente a C_{i+1} para $i = 1, 2, \ldots, 7$ y C_8 es también tangente a C_1. Determinar el valor de $\frac{r}{r'}$.

Problema 2. (Solución)

Sean a y b dos números reales positivos.

(a) Demostrar que si $a < b < e$ entonces $a^b < b^a$.

(b) Demostrar que si $e < a < b$ entonces $a^b > b^a$.

Problema 3. (Solución)

Calcule el límite en el infinito de la sucesión A_n, siendo A_n el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n} \\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Problema 4. (Solución)

Un juego de dados tiene las siguientes reglas:

- Se tiran dos dados equilibrados, numerados del 1 al 6, hasta que sumen 4 o 7.
- Si suman 4 gana el tirador, mientras que pierde si la suma es 7.

Determine la probabilidad de ganar dicho juego.

21. Extremadura 2018 (Entrada Web)

Ejercicio. (Solución (a)) (Solución (b)) (Solución (c)) (Solución (d))

Calcula uno y sólo uno de los siguientes apartados:

(a)

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

(b)

$$\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$$

(c)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

(d)

$$\int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{(x-1)^3} dx$$

Problema 1. (Solución)

Estando en Estados Unidos, el señor Martínez cambió un cheque de viaje. El cajero, al pagarle, confundió el número de dólares con los centavos y viceversa. El señor Martínez gastó 68 centavos en sellos y comprobó que el dinero que le quedaba era el doble del importe del cheque de viaje que había cambiado. ¿Qué valor mínimo tenía el cheque de viaje?.

Problema 2. (Solución)

Un tanque cilíndrico de radio R y de altura h, sin tapa superior, se encuentra lleno de agua hasta un nivel a ($a \leq h$). Se elige al azar un punto cualquiera sobre la superficie del cilindro incluyendo el fondo, y allí sehace una perforación. Hallar el valor esperado del volumen de agua en el tanque después de realizar la perforación y haberse vaciado el agua hasta el punto de perforación.

Problema 3. (Solución)

Hallar el lugar geométrico de los centros de los triángulos equiláteros inscritos en una elipse.

22. Cantabria 2018 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$$

23. Castilla la Mancha 2018 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Demuestra que todos los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n>2}$ son múltiplos de 600, siendo:

$$a_n = (n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^4 - 16)n^2$$

Problema 2. (Solución)

Demostrar que una recta d, que divide a un triángulo ABC en dos polígonos del mismo perímetro y de la misma área pasa por el centro de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

Problema 3. (Solución)

Una variable aleatoria X tiene una función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ kxe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(i) Hallar el valor de k para que, en efecto, sea una función de densidad de probabilidad.

(ii) Hallar la función de distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(-1 \leq X \leq 1)$.

(iii) Hallar el valor de la moda y de la mediana.

(iv) Hallar el valor esperado de X y su varianza.

24. Cataluña 2018 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

(a) De un conjunto C de N bolas ($N \geq 3$), consideramos un subconjunto S de k bolas ($k \leq N$). Encuentra una expresión matemática pra la probabilidad $P(k)$ que en dos extracciones consecutivas al azar, sin reposición, de bolas del conjunto C, al menos una de las bolas pertenezca al subconjunto S. Comprueba que en el caso particular de $k = N$, entonces $P = 1$ (evento seguro) y calcula la probabilidad para $k = N - 1$.

(b) Se escogen dos puntos sobre la circunferencia de un círculo de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que l cuerda dibujada entre estos dos puntos sea más grande que el radio del círculo?.

Problema 2. (Solución)

Sea $A(t)$ el área de la región del plano comprendida por el primer cuadrante entre la elipse e ecuación $4x^2+y^2 = 1$, y la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$ donde $0 \leq t \leq 1/2$. Calcula los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0, 1/2]$.

Problema 3. (Solución)
Problema 4. (Solución)
Problema 5. (Solución)

25. Galicia 2017 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Una circunferencia variable Γ es tangente a la recta $y = 0$ en el punto $A(-1, 0)$. Sea r la recta tangente a Γ en el punto diametralmente opuesto al punto A, y s la recta tangente a Γ, distinta de $y = 0$, que pasa por $B(1, 0)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico generado por los puntos de intersección de las rectas r y s.

26. Comunidad Valenciana 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Responda razonablemente a las siguientes preguntas:

(a) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y P un punto del plano euclídeo exterior a la circunferencia. Sea s una recta que pasa por P y es secante con C. Si A y B son los puntos de corte de la circunferencia con s, demuestre que el producto $PA \cdot PB$ no depende de la recta secante s elegida.

(b) En un terreno llano seha construido un estanque de planta circular en el que la superficie libre de agua enrasa con el terreno. El estanque está centrado en el punto $C(43, 31)$ y su radio es de $30\ m$. Un pato, situado inicialmente en el punto $P(3, 1)$, marcha en línea recta y con velocidades uniformes de $0,32\ m/s$ y $0,96\ m/s$, sobre tierra y nadando, respectivamente, con el fin de llegar a la orilla opuesta. Determine la dirección que debe tomar el pato para que la duración del recorrido sea la mínima posible y calcule el tiempo correspondiente.

NOTA: La dirección del pato debe ser expresada en función de una razón trigonométrica.

Problema 2. (Solución)

Se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y se define la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$F((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + ax_2y_2$$

1. Determine los valores de a para los cuales el par $(\mathbb{R}^2, F)$ es un espacio vectorial euclídeo y calcule la matriz de la métrica en la base canónica.
2. Para los valores de a que lo permitan, calcule la base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, F)$. ¿Cuál es la matriz de la métrica en esa base).
3. Sea $(\mathbb{R}^3, G)$ el espacio vectorial euclídeo que hace ortonormal a la base $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Dé la matriz coordenada de la métrica G en la base canónica.
4. Supongamos que A es una matriz simétrica real $n \times n$ que satisvace la condición $A^3 - 3A^2 + 6A - 2I = O$, donde I y O son las matrices identidad y nula de tamaño $n \times n$, respectivamente. Demuestre que existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $A = cI$.

Problema 3. (Solución)

Un chico y una chica deciden encontrarse en determinado lugar en algún momento entre las $17 : 00$ y las $18 : 00$. Cada uno esperará al otro un máximo de 10 minutos. Halle la probabildiad deque ambos se encuentren, suponiendo que llegan independientemente a la cita, si:

1. El chico llega a las $17 : 30$.
2. Llegando uno y el otro en cualquier momento.

Problema 4. (Solución)

Con un solo corte recto puedes dividir un pastal circular en dos partes. Un segundo corte que atraviese al primero producirá, probablemente, cuatro partes, y un tercer corte puede llegar a producir siete partes.

1. ¿Cuál es el mayor número de partes que puedes obtener con seis cortes rectos?.
2. ¿Y, en general, cuántos pedazos de pastel se obtienen con n cortes?.

Problema 5. (Solución)

Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. Halle un conjunto infinito de ternas (a, b, c) formadas por números naturales distintos que sean solución de la ecuación
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2c(a + b)$$

2. Demuestre que la ecuación
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3b(a - c)(a + c - b)$$
no tiene soluciones $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tales que $a < b < c$.

Problema 6. (Solución)

27. Asturias 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

De un depósito se que contiene un fluido viscoso se desprenden gotas que supondremos esféricas. El radio de una gota es una variable X medida en milímetros, de tamaño mínimo $r > 1$, cuya probabilidad de desprenderse es inversamente proporcional a su volumen.

1. Calcule r sabiendo que la esperanza de X supera en 1 a su mediana.
2. Si se desprenden cinco gotas, cuál es la probabilidad de que exactamente tres de ellas superen el doble del tamaño mínimo.
3. Si el número de gotas que se desprenden por minuto sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, calcule su esperanza, sabiendo que la probabilidad de que caigan cinco gotas en un minuto es la mitad de la probabilidad de que caigan cinco gotas en dos minutos.

28. Cantabria 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Responda a las siguientes cuestiones independientes entre sí:

1. Calcule la suma finita
$$S = 7 + 77 + 777 + \ldots + \overbrace{777\ldots7}^{(n)}$$
2. En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae al azar una bola, obteniéndose el número a. Se devuelve la bola a la urna y se repite el proceso dos veces más, obteniéndose los números b y c. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema sea incompatible?
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \quad 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Problema 1. (Solución)
Dos amigos A y B se citan en un determinado lugar de la siguiente forma: Ambos llegarán en momentos al azar del intervalo $[0, T]$ (en minutos) e independientemente del otro. Si A está dispuesto a esperar a minutos, $0 < a < T$, y B está dispuesto a esperar b minutos, $0 < b < T$, se pide:

1. Calcule la probabilidad de que A llegue antes que B.
2. Determine la probabilidad de que ambos se encuentren.
3. Supuesto que ambos se encuentran, calcule la probabilidad de que B haya llegado antes que A.

29. Ceuta 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

La longitud del radio de una esfera es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = kx(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

y nula en el resto.

1. Calcule el valor de la constante k para que f sea efectivamente una función de densidad. Calcule así mismo la función de distribución.
2. Se sabe que el radio de la esfera mide más de $1/3$. Calcule la probabilidad de que su longitud sea inferior a $3/4$.
3. Si $S = 4\pi x^2$ es la superficie de la esfera de radio x, calcule $P(S > s)$.

30. País Vasco 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

En una bolsa se desean introducir bolas blancas y negras. Se lanza una moneda al aire cinco veces y se introducen en la bolsa tantas bolas blancas como caras se obtengan, y tantas bolas negras como cruces salgan. Si se extrae una bola y resulta ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que en la bolsa hubiera tres bolas blancas y dos negras antes de la extracción?

31. Galicia 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Dada la función de densidad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que vale

$$f(x, y) = k(x^2 + y^3)e^{-(x+y)}, \quad x \geq 0,\ y \geq 0$$

y nula en el resto, se pide

1. El valor de k
2. Las funciones de densidad marginales
3. La función de densidad condicional $f(x|y)$
4. Estudie si las variables X e Y son independientes

32. Madrid 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Tres máquinas A, B y C producen una determinada pieza. La máquina A la elabora con una longitud que se distribuye según una distribución normal de parámetros $\mu = 165$ y $\sigma = 5$; la máquina B la fabrica con una longitud que se distribuye según una distribución normal de parámetros $\mu = 175$ y $\sigma = 5$; y la máquina C también lo hace con una longitud que se distribuye normalmente con parámetros $\mu = 170$ y $\sigma = 5$. Las longitudes son en metros y las tres máquinas fabrican en gran cantidad.

1. El 50 % de la producción la hace la máquina A, el 20 % la máquina B y el resto la máquina C. Se eligen tres piezas al azar y se sabe que miden más de 173 m. cada una, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezcan a la tercera máquina?

2. Si se eligen 100 piezas al azar de la máquina B, independientes unas de otras, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 60 midan más de 173 m?

33. Melilla 2016 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Se realiza un juego entre dos jugadores A y B que ganará aquél que gane dos partidas. La probabilidad de que el jugador A gane una partida es p, la probabilidad de que el jugador B gane una partida es q, y la probabilidad de que empaten es r, siendo $p, q, r > 0$. Calcule la probabilidad de que el jugador A gane el juego.

Problema 1. (Solución)
El número de años que dura un equipo de música es una variable aleatoria X con una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ ae^{-bx}, & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Si la duración media de un equipo de música es 15 años, se pide:

1. Calcule a y b.

2. Si el equipo ha funcionado bien los tres primeros años, ¿cuál es la probabilidad de que dure un año más?.

3. Calcule la desviación típica y la función de distribución de la variable X.

34. Comunidad Valenciana 2015 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Sean f y g dos endomorfismos del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ definidos para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como sigue:

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x - z, 2y + z) \qquad g(x, y, z) = (x, y, 0)$$

(a) Halle una base, unas ecuaciones y la dimensión del núcleo de f y del núcleo de g.

(b) Halle una base, unas ecuaciones y la dimensión de la imagen de f y de la imagen de g.

(c) Determine las matrices asociadas a los endomorfismos f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Problema 2. (Solución)

Se consideran los puntos $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$, donde $a > 0$, y un punto M variable sobre la recta r de ecuación $y = x + 1$. Desde A se traza la perpendicular a la recta $A'M$ y desde A' se traza la recta perpendicular a AM, cortándose ambas rectas en un punto Q. Determina el lugar geométrico de los puntos Q según los valores positivos de a y clasifíquelo.

Comentario adicional (pdf)

Problema 3. (Solución)

Problema 4. (Solución)

De una urna con r bolas negras y $N - r$ bolas blancas se extraen n bolas consecutivamente y sin reemplazamiento ($n \leq N$). Calcule la esperanza y la varianza de la variable aleatoria X que da el número de bolas negras extraídas.

35. Aragón 2014 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Sea el punto $P(p, q)$ que se encuentra en el lugar geométrico tal que

$$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$$

Si la recta tangente en dicho punto corta a los ejes en los puntos $(0, m)$ y $(n, 0)$, demostrar que $m + n = a$.

36. Comunidad Valenciana 2009

Problema 1. (Solución)

Calcular:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(3+x)}} dx$$

37. Comunidad Valenciana 2006 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

1. Hallar la base del sistema de numeración en la que esta bien hecha la operación
$$3753_x - 3586_x = 189_x$$
2. Una vez hallado el valor de x, deducir cuál es el criterio de divisibilidad entre $x-1$, en dicha base x.
3. Después justifica, utilizando el apartado anterior, si alguno de los números dados es divisible entre $x-1$ en la base x.
4. Por último, pasa el primero de los números dados al sistema de numeración de base 9.

Problema 2. (Solución)

Problema 3. (Solución)

Consideramos el tetraedro de vértices A, B, C, y D. Si el punto E recorre la arista AB, ¿cuándo el ángulo CED es máximo?

Problema 4. (Solución)

La probabilidad de que una pareja tenga n hijos es αp^n, con $0 < p < 1$, $n \geq 1$, $0 < \alpha p < 1$. Supongamos que la distribución de sexos entre los hijos son igualmente probables. Obtén:

1. La probabilidad de que tengan al menos un hijo.
2. La probabilidad de que no tengan hijos.
3. La probabilidad de que una pareja tenga k hijos varones, sabiendo que tiene n hijos.
4. La probabilidad de que una pareja tenga k hijos varones.
5. La probabilidad de que una pareja tenga 3 hijos sabiendo que tiene 1 hijo varón.
6. El número esperado de hijos.

38. Extremadura 2002 (Entrada Web)

Problema 1. (Solución)

Hallar, en cada uno de los casos, las ecuaciones de las curvas que cumplen las siguientes condiciones:

(a) La pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera (x, y) es la mitad de la pendiente de la recta que une ese punto con el origen.

(b) La normal en cada punto, la recta que une ese punto con el origen y el eje ?? forman un triángulo isósceles que tiene al eje OX como lado desigual.

(c) El segmento de la normal trazada en cualquier punto (x, y) que tiene por extremos a ese punto y su intersección con OX es cortado en dos partes iguales por el eje OY.

39. Andalucía 1998 (Entrada Web)

Problema 2. (Solución)

Representar las gráficas de

$$y(x^2+3)=1 \quad y \quad 8xy-x+1=0$$

y determinar el área limitada por las curvas y los semiejes positivos.

Problema 5. (Solución)

Sea $z=e^{2\pi i/7}$ una raíz séptima de la unidad. Calcular

$$1+z+z^4+z^9+z^{16}+z^{25}+z^{36}$$

40. Sueltos (convocatoria desconocida) (Entrada Web)

Problema X_1. (Solución)

Calcular

$$D_n \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Problema X_2. (Solución)

Dada una pirámide regular, de base cuadrada, y altura el doble del lado de la base, determine la relación entre los volúmenes de las dos figuras en que queda dividida por un plano que, pasando por un lado de la base, corta a la pirámide según un polígono de perímetro mínimo.

Problema X_3. (Solución)

El perímetro de una circunferencia de centro O y radio r se divide en n partes iguales. Demuestre que el límite, cuando n tiene a infinito, de la media aritmética de las longitudes de todas las dircunferencias tangentes a la primera en los puntos de división y que pasan por un punto fijo que dista d de O, siendo $d<r$, es igual a $(2r-\sqrt{r^2-d^2})\pi$.

Problema X_4. (Solución)

La curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-4=0$ con el plano $x+y-z-1=0$ se proyecta ortogonalmente sobre el plano coordenado XOY. Estudiese la cónica proyección. ¿Cuál es su ecuación reducida?.

Problema X_5. (Solución)

Clasificar la cuádrica $x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 2xy - 2xz + 6yz - 4 = 0$. Hallar la intersección de dicha superficie con el plano que pasa por el punto $(1, 2, 1)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - z = 2 \end{array} \right\}$.