Problema 1. *Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y P un punto del plano euclídeo exterior a la circunferencia. Sea s una recta que pasa por P y es secante con $\mathcal{C}$. Si A y B son los puntos de corte de la circunferencia con s, demuestre que el producto $PA \cdot PB$ no depende de la recta secante s elegida.*
2. *En un terreno llano se ha construido un estanque de planta circular en el que la superficie libre de agua enrasa con el terreno. El estanque está centrado en el punto $C(43, 31)$ y su radio es de 30 m. Un pato, situado inicialmente en el punto $P(3, 1)$, marcha en línea recta y con velocidades uniformes de 0,32 m/s y 0,96 m/s, sobre tierra y nadando, respectivamente, con el fin de llegar a la orilla opuesta. Determine la dirección que debe tomar el pato para que la duración del recorrido sea la mínima posible y calcule el tiempo correspondiente.*

NOTA. *La dirección del pato debe ser expresada en función de una razón trigonométrica.*

Problema 2. *Se considera el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$ *y se define la aplicación* $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$F(x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + a x_2 y_2.$$

1. *Determine los valores de* a *para los cuales el par* (R^2, F) *es un espacio vectorial euclídeo y calcule la matriz de la métrica en la base canónica.*
2. *Paralos valores de* a *que lo permitan, calcule la base ortonormal de* $(\mathbb{R}^2, F)$. *¿Cuál es la matriz de la métrica en esa base?*
3. *Sea* (R^3, G) *el espacio vectorial euclídeo que hace ortonormal a la base* $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. *Dé la matriz coordenada de la métrica* G *en la base canónica.*
4. *Supongamos que* $\mathbf{A}$ *es una matriz simétrica real* $n \times n$ *que satisface la condición* $\mathbf{A}^3 - 3\mathbf{A}^2 + 6\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{O}$, *donde* $\mathbf{I}$ *y* $\mathbf{O}$ *son las matrices unidad y nula de tamaño* $n \times n$, *respectivamente. Demuestre que existe un único* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{A} = c\mathbf{I}$.

Problema 3. *Un chico y una chica deciden encontrarse en determinado lugar en algún momento entre las 17:00 y las 18:00. Cada uno esperará al otro un máximo de 10 minutos. Halle la probabilidad de que ambos se encuentren, suponiendo que llegan independientemente a la cita, si:*

1. *El chico llega a las 17:30.*
2. *Llegando uno y el otro en cualquier momento.*

Problema 4. *Con un solo corte recto puedes dividir un pastel circular en dos partes. Un segundo corte que atraviese al primero producirá, probablemente, cuatro partes, y un tercer corte puede llegar a producir siete partes.*

1. *¿Cuál es el mayor número de partes que puedes obtener con seis cortes rectos?*
2. *¿Y, en general, cuántos pedazos de pastel se obtienen con n cortes?*

Problema 5. *Responda razonadamente a las siguientes cuestiones:*

1. *Halle un conjunto infinito de ternas (a, b, c) formadas por números naturales distintos que sean solución de la ecuación*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2c(a + b).$$

2. *Demuestre que la ecuación*

$$a^3 + b^3 - c^3 = 3b(a - c)(a + c - b)$$

no tiene soluciones $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tales que $a < b < c$.

Problema 6. *El llamado* Juego de la Vida *se juega sobre un tablero cuadriculado en el que se coloncan fichas de color negro en alguna de las casillas. Estas fichas pueden "morir"o "vivir"según las siguientes reglas:*

1. *Cada ficha que tenga dos otres fichas vecinas sobrevive y pasa a la siguiente generación.*
2. *Cada ficha que tenga cuatro o más vecinas muere y se retira del tablero. Las fichas con una o ninguna vecina también mueren.*
3. *Cada casilla vacía que tenga exactamente tres fichas vecinas genera una nueva ficha.*

Todas las generaciones y muertes de fichas ocurren a la vez, lo cual se interpreta como que las fichas que mueren, antes de ser retiradas del tablero, pueden ayudar a genera otra ficha. Cada cuadrícula del tablero tiene ocho casillas vecinas: cuatro ortogonalmente adyacentes y cuatro adyacentes en diagonal del tablero. En el ejemplo de la cuadricula continua que figura tras este enunciado, la formación inicial de tres fichas, en dos generaciones, se hace periódica. La formación inicial de cuatro fichas se estabiliza en dos generaciones. Realice un estudio de las cinco posibles formaciones iniciales de cuatro fichas conectadas entre sí. ¿Cuál de ellas tiene una "vida"más larga antes de estabilizarse o ser periódica?