Problema 1 [2,5 puntos]

Dados los siguientes subespacios vectoriales S_1 y S_2 de R^4:

$$S_1 = \langle (1,1,-2,1), (0,1,-1,2), (2,-1,-1,-4) \rangle$$

$$S_2 = \{ (x,y,z,t) \in R^4 \,/\, 3x + az = 0 \,;\, x - 2y - 2t = 0 \}$$

Hallar **a** para que $S_1 + S_2$ sea distinto de R^4. En este caso, obtener la dimensión y una base de $S_1 \cap S_2$.

Problema 2 [1,75 puntos + 0,75 puntos]

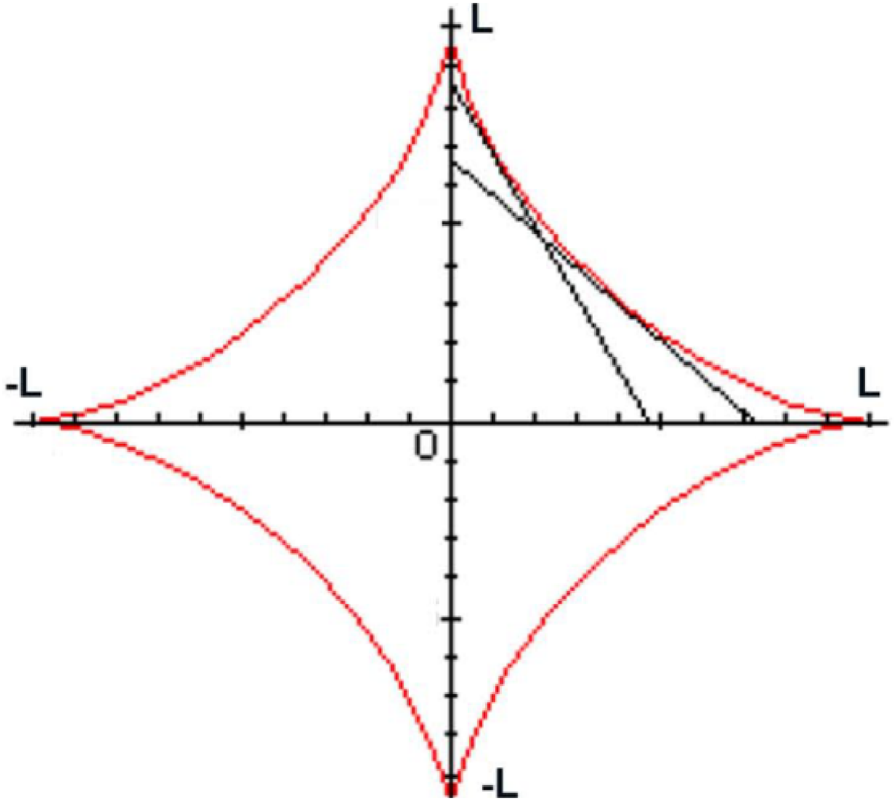
Dada la ecuación $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Se pide:

(a) Discutir las soluciones de la ecuación en función de los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

(b) Resolver la ecuación si $k = -27$.

Problema 3 [2,5 puntos]

Demostrar que la astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}$ es la envolvente de la familia de segmentos móviles de longitud constante L, cuyos extremos se apoyan en los ejes de coordenadas.



Problema 4 [1,25 puntos + 1,25 puntos]

El número de piezas por minuto que llegan a una máquina en una industria automovilística es una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. Y el tiempo, en minutos, que transcurre entre las llegadas de un par de piezas, es una variable aleatoria T cuya función de densidad es:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Suponiendo que $\lambda = 3$ en ambas variables aleatorias. Se pide:

(a) Si en un periodo de 120 segundos ya han llegado al menos 3 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que en ese periodo lleguen como mucho 2 piezas más?

(b) Obtener la función de distribución de probabilidad acumulada de T, y utilizarla para calcular la probabilidad de que transcurran menos de 90 segundos entre las llegadas de un par de piezas.

1. **PROBLEMA (2,5 puntos)**

Kalkula a, b y c en la siguiente explresión para que sea del espacio vectorial de los polinomios de segundo grado $P_2[x]$.

$$P(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x-1}+\frac{x^3+bx^2+cx+a}{x+1}+\frac{x^3+cx^2+ax+b}{x-2}$$

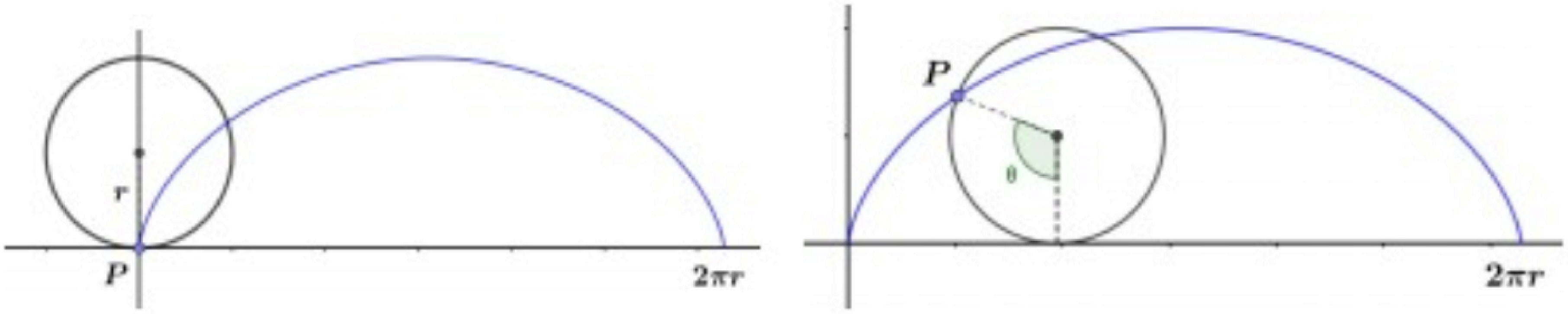
Siendo P(x) el polinomio anterior, prueba que $B=x^2+x+1\,,x^2-1,P(x)$ es una base del espacio vectorial del grupo de polinomios de segundo grado $P_2[x]$, y calcula las coordenadas del polinomio $Q(x)=2x^2+3x$ en esta base.

2. PROBLEMA (2,5 puntos)

Se llama cicloide a la curva que describe un punto de una circunferencia al rodar por una linea recta. Si P es un punto de la circunferencia y r es el radio de la circunferencia, las ecuaciones paramétricas del cicloide son las siguientes:

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La circunferencia rueda por el eje OX y el punto P está en el origen cuando empieza, el ángulo θ es el ángulo que crea el punto P.



Sabiendo que la recta y= k corta el primer arco del cicloide, calcula el valor del parámetro k para que los arcos que cortan midan lo mismo.

3. PROBLEMA (2,5 puntos)

Sea P un punto de la parábola $y^2=2x$. La recta tangente que pasa por el punto P y la recta normal cortan el eje OY en A y B respectivamente. Calcula la ecuación del lugar geométrico del baricentro del triángulo PAB cuando el punto se mueve por la parábola.

4. PROBLEMA (2,5 puntos)

En una empresa de Leds se crean dos tipos de diodos (tipo A y tipo B). La "vida útil" del tipo A (en miles de horas) sigue una distribución normal con una media $\mu_A = 45$ y una desviación típica de $\sigma_A = 5$. El diodo tipo B sigue una distribución normal pero con una media $\mu_B = 42$ y una desviación típica $\sigma_B = 5$. Suponiendo que la "vida útil "de los diodos de tipo A y B sean independientes entre sí:

a) Calcula la probabilidad de que la "vida útil" de los diodos A y B tengan una diferencia menor a 1000 horas.

b) Para fabricar una bombilla se usan 35 diodos de tipo A. Cual es la probabilidad de que después de 40000 horas, exactamente 30 sigan funcionando?

c)En una muestra aleatoria de 20 diodos de tipo B, cuál es la probabilidad de que la media de "vida útil" esté entre 40000 y 43000 horas?