

PROBLEMA N°1

Dados la matriz $A \in R^{4 \times 3}$, el vector $b \in R^4$, $a \in R$ y el subespacio F de R^4 .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a - 2 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ y } F \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Discutir y resolver cuando sea compatible el sistema $AX=b$, con $X \in R^3$ (4 puntos).

b) Sea E el espacio columna de A , calcular sus ecuaciones implícitas. (2 puntos).

c) Encontrar una base del subespacio $E \cap F$. (2 puntos).

d) Calcular la matriz B de la transformación lineal. $T: R^3 \rightarrow R^4$ que verifica:

$T(e_1) = A(e_2 + e_3)$, $T(e_2) = Ae_3$, $T(e_3) = Ae_2$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de R^3 . (2 puntos).

PROBLEMA N°2

Dados los puntos del plano $A(1,2)$ y $B(3,3)$, se pide:

- a) Calcular la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el punto A y el foco en el punto B . (4 puntos).

- b) Determinar cómo número complejo en forma binómica los vértices de un triángulo equilátero con centro en A , sabiendo que B es uno de sus vértices. (6 puntos).

PROBLEMA N°3

Consideremos la curva C de ecuación: $x^2 + y^2 = 4$

- a) De todos los triángulos inscritos en la curva C, con vértice en el punto A(0,2) y base paralela al eje OX, calcular el que tiene máxima superficie. (5 puntos).
- b) Calcular la ecuación de la envolvente de la familia de circunferencias que tienen centro en la curva C y que sus radios son la mitad del radio de C. (5 puntos).

PROBLEMA N°4

Consideremos la función $f(x) = \cos x$

a) Calcular la serie de Taylor de la función f. (puntos).

b) Demostrar que: $\int_0^1 \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}$ (3puntos).

c) Calcular el valor de $\int_0^1 \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx$ con un error menor que 10^{-3}

PROBLEMA N°5

Consideremos las funciones $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = 2 - x \int_0^x e^{-t^2} dt$

a) Estudiar y representar gráficamente la función f (5 puntos).

b) Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x) + 2 - x}{x \ln(1-x)}$ (5 puntos)

PROBLEMA N°6

Consideremos el conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- a) Calcular la probabilidad de que sean reales las raíces de la ecuación: $x^2 + bx + c = 0$ cuando los coeficientes b y c se eligen al azar entre los números del conjunto C . (5 puntos).
- b) Supongamos un dado de cinco caras numeradas con los números de C . ¿Cuál es el número mínimo de veces que habría que lanzarlo para que la probabilidad de que salga al menos una vez el número 1 sea mayor que 0,9? (5 puntos).