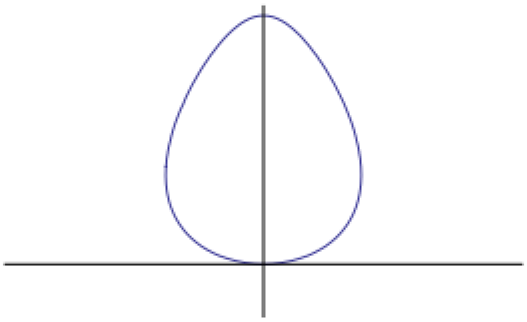
Cuestiones:

Contestad 5 de las 7 cuestiones siguientes. Cada cuestión contestada correctamente vale 0.56 puntos. Si es contestada incorrectamente descuenta 0.28 puntos. Hay que marcar las respuestas a la hoja del enunciado y hay que librarlo al tribunal junto con las hojas con las respuestas.

1. El volumen de la figura siguiente se obtiene rotando la curva $4x^2 = y(1-y)(2-y)^2$ alrededor del eje de ordenadas es:



A. $\pi/4$.
B. $\pi/60$.
C. $23\pi/240$.
D. $15\pi/17$.

2. El número π es irracional porque:
   a. No es raíz de ningún polinomio $P \in \mathbb{R}[X]$
   b. No se puede expresar como una fracción a/b con a i b números primos.
   c. No se puede expresar como una fracción a/b con $a, b \in \mathbb{Z}$
   d. Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

3. Es fácil demostrar que

$$3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$$

¿Cuántos números $x \in \mathbb{Z}$ tales que $1 \leq x \leq 1000$ cumplen $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}$

   a. 31
   b. 29
   c. 50
   d. 101

4. Queremos calcular y visualizar el vector que resulta del producto vectorial de dos vectores en el espacio con GeoGebra, Una vez definidos los dos vectores u y v:
   a. Tendremos que crear una herramienta nueva específica para calcular el producto vectorial.
   b. Escribiremos Vec(u,v) en la ventana de la CAS (calculadora algebráica).
   c. Usaremos el botón ProctoExterno en la barra de botones 3D.
   d. Usaremos el comando ProductoVectorial en la barra de entrada.

5. Si U i V son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo, S un subespacio vectorial de U, $f: U \to V$ una aplicación lineal y $g = f|s$, la restricción de f en S, entonces:
   a. $Im\ g = Im\ f$
   b. $Ker\ g = Ker\ f \cap S$
   c. $Ker\ g = Ker\ f$
   d. $Ker\ f\ \cap Ker\ g = \emptyset$

6. Queremos calcular el intervalo de confianza para la media cuando la población sigue una ley normal de media μ (desconocida) y de desviación estándar σ (desconocida). Disponemos de una muestra aleatoria simple de amplitud n y de valor de l amedia de la muestra $\bar{x}$. Tendremos que utilizar un estimador de la varianza maestral que sigue una distribución:
   a. $N(0,1)$
   b. $N(\mu, \sigma)$
   c. $N(\bar{x}, s)$ donde s es la varianza de la muestra.
   d. Una t-Student con $n-1$ grados de libertad.

7. Alba, Bernat y Cristina están intentando hacer el muñeco de nueve más alto posible. Alba dice: "Cuantas menos bolas de nieve utilicemos más alto será el muñeco. Yo propongo hacerlo con dos bolas esféricas de mismo radio." Bernat dice: "No estoy de acuerdo, yo pienso que cuantas más bolas esféricas utilicemos, más alta será- Yo propongo hacer un muñeco con 10 bolas esféricas." Cristina interviene diciendo: "No importa cuántas esferas hagáis, yo propongo hacerlo de seis bolas esféricas, porque en todos los casos tendría la misma altura". ¿Quién tiene razón?:
   a. Alba
   b. Bernat
   c. Cristina
   d. Ninguno

   Nota: Suponemos que cada niño tiene a su disposición el mismo volumen de nieve, que las bolas que haces son perfectamente esféricas y que el peso de las bolas no las deforma.

PROBLEMAS

Resolved 3 de 4 problemas. Cada uno vale 1,4 puntos.

1. a. De un conjunto C de N bolas ($N \geq 3$), consideramos un subconjunto S de k bolas ($k \leq N$). Encuentra una expresión matemática para la probabilidad $P(k)$ que en dos extracciones consecutivas al azar, sin reposición, de bolas del conjunto C, al menos una de las bolas pertenezca al subconjunto S. Comprueba que en el caso particular $k = N$, entonces $P = 1$ (evento seguro) y calcula la probabilidad para $k = N - 1$.

   b. Se escogen dos puntos sobre la circunferencia de un círculo de manera aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad que la cuerda dibujada entre estos dos puntos sea más grande que el radio del círculo?

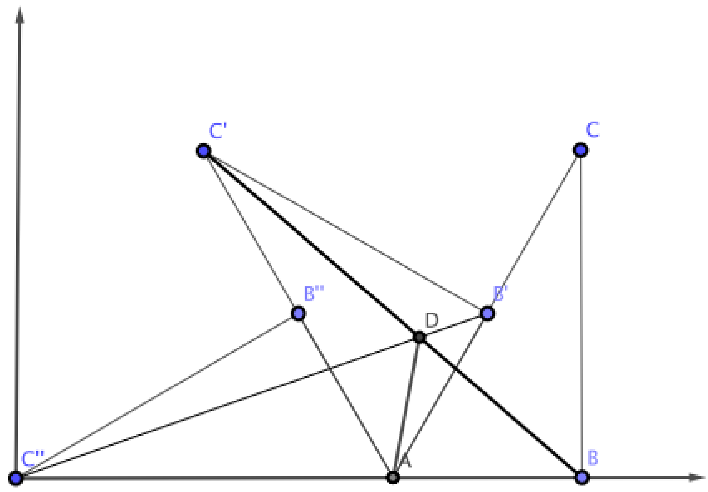
2. Sea $A(t)$ el área de la región del plano comprendida por el primer cuadrante entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$ donde $0 \leq t \leq 1/2$. Calcula los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. Sea $R = \mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de un conjunto cualquiera X. En R consideramos las dos operaciones $\triangle$, $*$, definidas por:

$$A \triangle B \coloneqq (A \cup B) - (A \cap B), \quad A * B \coloneqq A \cap B, \quad A, B \subseteq X$$

   a. Prueba que, con $\triangle$ como suma y $*$ como multiplicación, R tiene estructura de anillo. Comprueba que este anillo es conmutativo y di explícitamente los elementos neutros para la suma y la multiplicación y los elementos opuestos para la suma.
   b. Calcula todos los elementos invertibles de R.
   c. Comprueba que todos los elementos de R son idempotentes ($A^2 = A$, para todo $A \in R$).
   d. Compueba que para todo $A \in R$ se cumple $2A = 0$.
   e. Demuestra que el ideal generado por dos elementos $A, B \in R$ coincide con el ideal generado por el elemento $A \cup B$, y deduce que todo ideal finitamente generado de R es principal.

4. Los tres triángulos de la figura, $ABC, AB'C', AB''C''$ son idénticos con ángulos de 30, 60 y 90 grados. ¿Cuál es la razón del segmento CB y el segmento DA?



Diseño de una actividad para implementar en el aula. 3 puntos.

Escoge uno de los cuatro problemas o una de las siete cuestiones propuestas anteriormente y diseña una actividad basada totalmente o parcialmente en este problema o cuestión que pueda ser implementada en el aula en una o más sesiones.