1. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$:

(a) Demuestre que para cualquier sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la sucesión

$$a_1, \quad a_1^{a_2}, \quad a_1^{a_2^{a_3}}, \ldots$$

se hace constante módulo m para cualquier número natural m.

(b) Utilice el apartado anterior para demostrar que en la sucesión

$$7, \quad 7^7, \quad 7^{7^7}, \ldots$$

la cifra de las unidades se hace constante y calcule dicha cifra.

Observación: no confundir las expresiones de la forma $a_1^{a_2^{a_3}}$ con $(a_1^{a_2})^{a_3}$.

2. Sean a y b números reales y sea A_n la matriz de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida como

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a^2 & ab & b & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & a^{n-2}b & a^{n-3}b & a^{n-4}b & \dots & b \end{pmatrix}$$

para $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$. Determinar:

(a) El determinante de A_n.

(b) Las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ generado por los vectores columna de A_n.

(c) La dimensión del espacio cociente $\mathbb{R}^n/Ker(f)$, con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal con matriz asociada A_n.

3. Sea b un número real positivo no nulo.

(a) Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \dfrac{1}{1 + b \cdot e^{f(x)}}$, entonces $f(x) \leq \dfrac{x}{b}$ para cada $x > 0$.

(b) Para a un número real positivo, calcule:

$$\int_0^a \int_0^b e^{\text{máx}\{(a^2/b^2)x^2, y^2\}} \, dx \, dy.$$

4. Sean $ABCD$ cuatro puntos en una esfera de radio r tales que los puntos ABC forman un triángulo rectángulo en el plano que los contiene.

   (a) Determine el volumen del tetraedro $ABCD$ y estudie si $\frac{2}{3}r^3$ es una cota superior para este volumen. En su caso, determine, si existe, un tetraedro con volumen $\frac{2}{3}r^3$.

   (b) Determine el volumen del tetraedro $A_1B_1C_1D$, donde A_1 es el punto medio del lado AB, B_1 es el punto medio del lado BC y C_1 es el punto medio del lado CA, y su relación con el volumen del tetraedro $ABCD$.

5. Una prueba de selección en una empresa de análisis de datos consiste en realizar una jornada laboral de 8 horas, donde el aspirante debe emitir los análisis que le solicitan igual que el resto de trabajadores. La empresa sabe que el tiempo estimado por los aspirantes para realizar un análisis sigue una distribución normal con media μ y desviación típica $\dfrac{\mu}{10}$.

   (a) Si la empresa fija como objetivo realizar al menos 100 análisis en una jornada laboral, determine el valor de μ que debería alcanzar un aspirante en su preparación para que no cumpla el objetivo con una probabilidad de 0.025.

   (b) Si se sabe que un aspirante con $\mu = \dfrac{2}{25}$ horas ha alcanzado el objetivo, determine el número máximo de análisis que ha realizado en la jornada laboral con una probabilidad de, al menos, $\dfrac{0.1587}{0.5}$.